

PHẦN NỘI DUNG

Chương I. Lý thuyết chia hết trong tập số nguyên \mathbb{Z}

Bài 1. Chia hết và chia có dư

A. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Phép chia hết

Số nguyên a được gọi là chia hết cho số nguyên b , $b \neq 0$, nếu $a = bq$ với số nguyên q nào đó. Khi đó ta nói a là bội của b và ký hiệu $a : b$.

Ta còn nói b chia hết a hay b là ước của a và ký hiệu $b \mid a$.

Khi b không chia hết a ta viết $b \nmid a$ hay $a \not\vdots b$.

1.2. Tính chất

$$2.1.1. a \mid 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1, (a \in \mathbb{Z})$$

$$2.1.2. b \mid a \Rightarrow \pm b \mid \pm a \wedge |b| \mid |a|, (a, b \in \mathbb{Z})$$

$$2.1.3. a \mid a, (a \in \mathbb{Z}^*)$$

$$2.1.4. b \mid a \wedge a \mid b \Rightarrow b = \pm a, (a, b \in \mathbb{Z})$$

$$2.1.5. b \mid a_1, b \mid a_2, \dots, b \mid a_n \Rightarrow b \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, (b, a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z})$$

1.3. Phép chia có dư

Với cặp số nguyên a và b , $b \neq 0$ tồn tại cặp số nguyên q, r duy nhất sao cho

$$a = bq + r, 0 \leq r < |b|.$$

Khi đó ta nói rằng a chia cho b được thương q và dư r . Số q được gọi là thương hụt nếu $r \neq 0$.

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Chứng minh một số nguyên a chia hết cho nguyên m

Phương pháp:

- Phân tích thành nhân tử rồi xét số dư của các nhân tử chia cho m .
- Dùng phương pháp phản chứng.
- Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $2003^{2002} - 2003^{2001} : 11$.

Giải

Ta có: $2003^{2002} - 2003^{2001} = 2003^{2001} (2003 - 1) = 2003^{2001} \cdot 2002 : 11$, vì $2002 = 11 \cdot 182$.

Ví dụ 2. Cho a và b là hai số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b đồng thời chia hết cho 3.

Giải

Giả sử ngược lại a và b không cùng chia hết cho 3. Khi đó xảy ra 3 trường hợp sau:

- Trường hợp 1. $a = 3p + r$, $r = 1, 2$ và $b = 3q$.

Ta có: $a^2 = 3P + 1$; $b^2 = 3Q \Rightarrow a^2 + b^2 = 3(P + Q) + 1$ không chia hết cho 3, trái với giả thiết.

- Trường hợp 2. $a = 3p$ và $b = 3q + r$, $r = 1, 2$.

Tương tự ta cũng có $a^2 + b^2$ không chia hết cho 3, trái với giả thiết.

- Trường hợp 3. $a = 3p + r$, $r = 1, 2$ và $b = 3q + r'$, $r' = 1, 2$.

Ta có: $a^2 = 3P + 1$; $b^2 = 3Q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3(P + Q) + 2$ không chia hết cho 3, trái với giả thiết.

Vậy nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b đồng thời chia hết cho 3.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có: $P_n = (n+1)(n+2) \cdots (n+n) : 2^n$.

Giải

- Với $n = 1$, ta có: $P_1 = 2:2$.

- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, $k \geq 1$, tức là $P_k = (k+1)(k+2)\cdots(k+k):2^k$. Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là ta cần chứng minh

$$P_{k+1} = [(k+1)+1][(k+1)+2]\cdots[(k+1)+(k+1)]:2^{k+1}.$$

Thật vậy, ta có:

$$P_{k+1} = (k+2)(k+3)\cdots 2(k+1) = 2[(k+1)(k+2)\cdots(k+k)](2k+1) = 2(2k+1)P_k : 2.2^k$$

$$\text{hay } P_{k+1} : 2^{k+1}.$$

$$\text{Vậy } P_n = (n+1)(n+2)\cdots(n+n):2^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Dạng 2. Tìm số dư khi chia một số nguyên a cho một số nguyên m

Phương pháp:

- Dùng $a = bq + r$, $0 \leq r < |b| \Rightarrow bq \leq a < b(q+1)$.

Ví dụ. Cho biết $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ với $a = 135$, $q = 11$, $b, r \in \mathbb{N}$. Tìm b và r .

Giải

Ta có: $a = 135$ và $q = 11$

$$\Rightarrow 11b \leq 135 < 12b \Rightarrow \frac{135}{12} \approx 11,25 < b \leq \frac{135}{11} \approx 12,27 \Rightarrow b = 12 \text{ (do } b \in \mathbb{N}), \quad \text{còn}$$

$$r = 135 - 11 \cdot 12 = 3. \text{ Vậy } b = 12, r = 3.$$

Dạng 3. Chứng minh phương trình ẩn x, y, \dots không có nghiệm nguyên

Phương pháp:

- Viết $x = mq + r$, $0 \leq r < |m|$, rồi xét lần lượt các trường hợp $r = 0, 1, \dots, |m| - 1$.

Ví dụ. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1 = 3y$ không có nghiệm nguyên.

Giải

- Nếu $x = 3q$, $q \in \mathbb{Z}$ thì $x^2 + 1 = 9q^2 + 1$ không chia hết cho 3.

- Nếu $x = 3q \pm 1$ thì $x^2 + 1 = 3Q + 2$ không chia hết cho 3.

Vậy phương trình $x^2 + 1 = 3y$ không có nghiệm nguyên.

Dạng 4. Tìm số nguyên x để biểu thức y là một số nguyên

Phương pháp:

Để tìm số nguyên x để biểu thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là một số nguyên, ta làm như sau:

- Chia $P(x)$ cho $Q(x)$ để được biểu thức $f(x) + \frac{b}{Q(x)}$, $f(x)$ là một đa thức.

- Tìm tất cả các ước của b .

- Cho $Q(x)$ lần lượt bằng các ước của b , ta được các số nguyên x cần tìm.

Ví dụ. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Giải

$$\text{Điều kiện: } x \neq 1. \text{ Ta có: } y = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}. \quad y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 1 \text{ là ước của } 2.$$

2 có tất cả các ước là: $\pm 1; \pm 2$.

$$x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy các số nguyên x cần tìm là: $-1, 0, 2, 3$.